Johannes-Gutenberg-Universität Mainz

Im Rahmen des Seminares

„Ausgewählte höhere Kurven“

im WS 2016/17

Bei Prof. Dr. Duco van Straten

Aus der fünften Gruppe

Die Rosette
Die Astroide

Stephanie Katharina Schwab

Inhaltsverzeichnis

1 Die Rosette

1.1 Erste Erzeugungsweise

Eine Strecke $\overline{AB}$ der festen Länge a gleitet mit ihren Endpunkten auf den Achsen: Der Punkt B bewegt sich auf der der y-Achse, der Punkt A auf der x-Achse.
Fällt man nun vom Ursprung aus das Lot $\overline{OB}$ auf die Gerade $\overline{AB}$, so beschreibt der Schnittpunkt P zwischen dem Lot und der Geraden die Rosette.

Wenn man den Winkel ∢POA mit φ bezeichnet, so ergibt sich aus der Winkelsumme in dem Dreieck △OPB, dass auch ∢ABO φ ist.

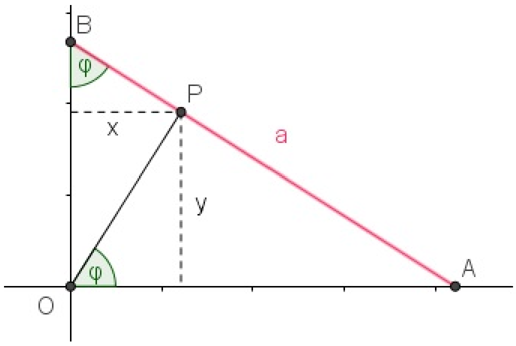


Abbildung 1.1: Konstruktion der Rosette

Aus dem Dreieck △OAB ergibt sich :

$$\overline{OB} = a \cos \varphi$$

Aus dem Dreieck △OPB folgt:

$$\overline{OP} = \overline{OB} \sin \varphi$$

Also folgt:

$$r = a \cos \varphi \sin \varphi$$

Mit dem Additionstheorem $\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$ kann man dies umschreiben zu

$$r = \frac{a}{2} \sin 2\varphi$$

Daraus kann man die **kartesische Gleichung** der Kurve herleiten:

Man setzt $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$.
Unter der Annahme, dass $r \neq 0$ gilt, folgt:

$$r = a \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Nachdem man auf beiden Seiten mit $(x^2 + y^2)$ erweitert und quadriert, kommt man auf:

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2$$

Wir mussten $r \neq 0$ annehmen, damit wir durch dies teilen dürfen. Wenn man die letzte Gleichung betrachtet, sieht man, dass diese ebenso für $r = 0$ erfüllt wird. Somit gilt die kartesische Gleichung für alle Punkte der Rosette.

Wenn man die Kurve konstruiert, ergibt sich dieses Bild:

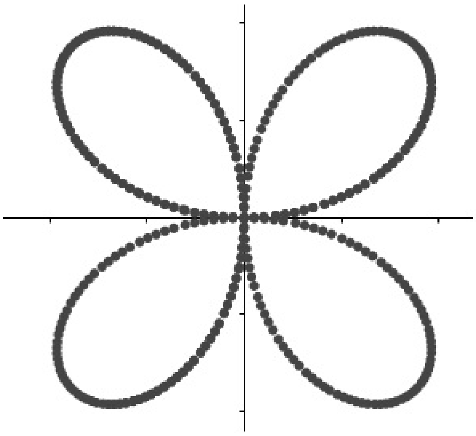


Abbildung 1.2: Die Rosette

Aufgrund der Form wird diese Kurve auch vierblättriges Rosenblatt genannt. *Quadrifolium*, wie sie auch genannt wird, kommt aus dem Lateinischen und heißt ebenso "vierblättrig". Aus dem Französischen übersetzt, heißt die Kurve vierblättriges Kleeblatt (*trèfle à quatre feuilles*).

1.2 Auswertung der Kurvengleichung

Aus der Koordinatengleichung folgt, dass die Rosette zu den Achsen symmetrisch ist.
Aus der Polargleichung kann man sehen:
Die Kurve ist durch $\frac{a}{2}$ beschränkt. Der Radius $\frac{a}{2}$ wird für $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ und $\frac{7\pi}{4}$ auch erreicht. Also wird die Rosette von einem Kreis mit Radius $\frac{a}{2}$ eingeschlossen.
Der Radius ist gleich 0 für $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$, π und $\frac{3\pi}{2}$.

1.3 Weitere Konstruktionen

1.3.1 Konstruktion aus der Polargleichung

Die Polargleichung führt zu einer sehr direkten Konstruktion:

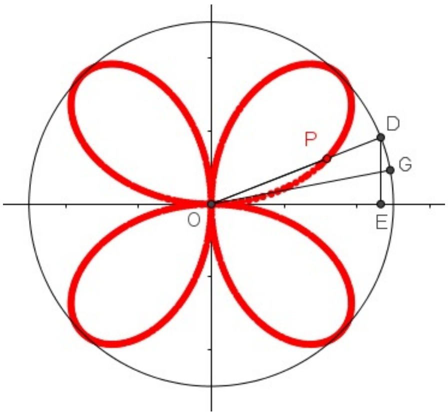


Abbildung 1.3: Konstruktion

Man zieht einen Kreis mit Radius $\frac{a}{2}$ ausgehend vom Ursprung O. Von O aus zieht man in einem beliebigen Winkel eine Strecke die den Kreis im Punkt D schneidet. Den Winkel, den die Strecke $\overline{OD}$ mit der X-Achse einschließt, halbiert man und die so gewonnene Strecke wird als $\overline{OG}$ bezeichnet. Von D aus fällt man das Lot auf die X-Achse und erhält den Punkt E. Bezeichnet man den Winkel $\sphericalangle$XOG mit φ, so gilt $\overline{DE} = \sin 2\varphi$. Trägt man die Strecke $\overline{|DE|}$ an der Strecke $\overline{OG}$ vom Ursprung aus ab, so beschreibt der so entstehende Punkt eine Rosette.

Es gibt weitere Konstruktionsmöglichkeiten der Rosette, hier sind drei weitere nur genannt:
Wie man erkennt, wird im Folgenden eine um 45° gedrehte Rosette konstruiert. Die uns bekannte Kurve kann man aber ebenso konstruieren, indem man die Anfangslage entsprechend anpasst.

1.3.2 Konstruktion als Hypotrochoide

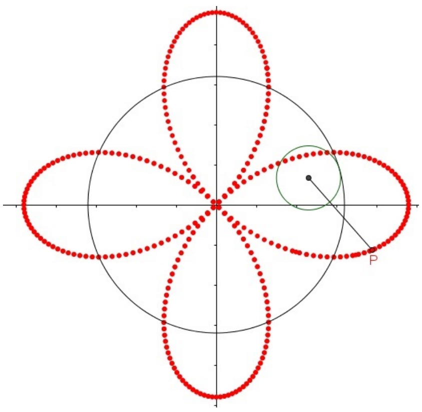


Abbildung 1.4: Als Hypotrochoide

Ein Kreis rollt im Inneren eines weiteren Kreises, der den vierfachen Radius des ersten Kreises hat, ab. Eine Strecke der dreifachen Länge des Radius des kleineren Kreises ist fest mit dem Mittelpunkt des kleineres Kreises verbunden. In der Anfangslage liegt der kleinere Kreis so auf der x-Achse, dass auch die Strecke in der Verlängerung auf der x-Achse liegt.
Beim Abrollen des kleineren Kreise zeichnet der Endpunkt der Strecke eine Rosette.

1.3.3 Konstruktion als Schnitt zwischen einer Gerade und einem Kreis

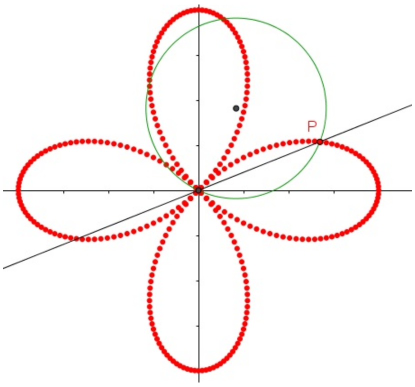


Abbildung 1.5: Konstruktion

In der Anfangslage liegt eine Gerade auf der x-Achse. Ein Kreis liegt mit seinem Mittelpunkt ebenso auf der x-Achse so, dass dieser mit seinem Rand den Ursprung berührt.
Gerade und Kreis drehen sich um den Ursprung in die selbe Richtung, wobei sich der Kreis dreimal so schnell dreht wie die Gerade.
Der zweite Schnittpunkt (der erste Schnittpunkt ist immer der Ursprung) dieser beiden Objekte beschreibt eine Rosette.

1.3.4 Konstruktion als Schnitt zwischen zwei Kreisen

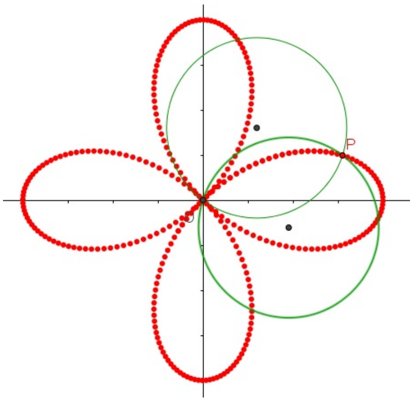


Abbildung 1.6: Konstruktion

In der Anfangslage liegen zwei Kreise gleicher Größe aufeinander so, dass ihre Mittelpunkte auf der x-Achse liegen und mit ihren Rändern den Ursprung berühren.
Beide Kreise drehen sich entgegengesetzt um den Ursprung, wobei sich einer der beiden Kreise dreimal so schnell dreht wie der andere.
Der zweite so enstehende Schnittpunkt dieser beiden Objekte beschreibt eine Rosette.

1.4 Quadratur

Es gibt einen interessanten Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt der Rosette und dem Flächeninhalt des Kreises, der die Rosette umgibt.
Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt einer halben Blüte, also:

$$S_{\text{halbe Blüte}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2}{4} \sin^2 2\varphi \, d\varphi$$

Mit der Substitution $\theta = 2\varphi$ ergibt sich:

$$S_{\text{halbe Blüte}} = \frac{a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\ \frac{d\theta}{2} = \frac{a^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\ d\theta = \frac{a^2}{16}\cdot\left[-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{16}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{a^2}{64}\pi$$

Um die Gesamtfläche zu erhalten, muss man dies mit 8 multiplizieren. Damit beträgt die Gesamtfläche

$$S_{\text{ganz}} = \frac{a^2}{8}\pi$$

Der Flächeninhalt des Kreises mit Radius $\frac{a}{2}$, der die Kurve umgibt, beträgt:

$$F_{\text{Kreis}} = \frac{a^2}{4}\pi$$

Damit ist die Rosette halb so groß wie der sie umgebenden Kreis.

2 Die Astroide

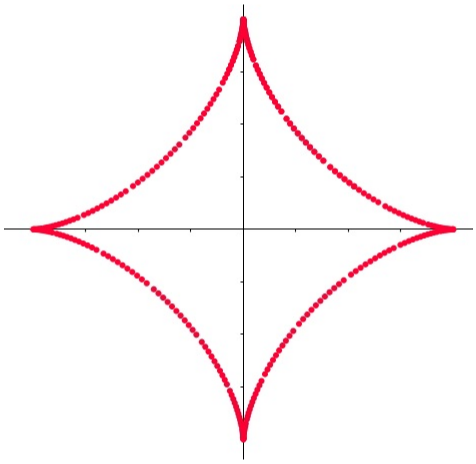


Abbildung 2.1: Die Astroide

Der Name kommt aus dem Griechischen und bedeutet Stern. Somit ist die Astroide sozusagen eine „Sternkurve“.
Untersucht wurde diese Kurve von verschiedenen Mathematikern zwischen dem 17. und 19. Jahrhundert, u.a. von Bernoulli (1691) und Leibniz (1715).
Der Name „Astroide“ stammt aus einem im Jahre 1838 von dem österreichischen Astronomen Joseph Johann von Littrow publizierten Buch.

2.1 Erste Erzeugungsweise

Genau wie bei der Rosette haben wir auch hier eine Strecke $\overline{AB}$ mit der festen Länge a, die mit ihren Endpunkten auf den Koordinatenachsen gleitet. Um die Kurve zu erzeugen, wird zunächst das Rechteck BOAE gezeichnet, wobei O den Ursprung bezeichnet und E die vierte so entstandene Ecke ist. Von E aus wird das Lot auf die Gerade $\overline{AB}$ gefällt. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Geraden wird als P bezeichnet und mit der Bewegung der Geraden beschreibt dieser Punkt P die Kurve.

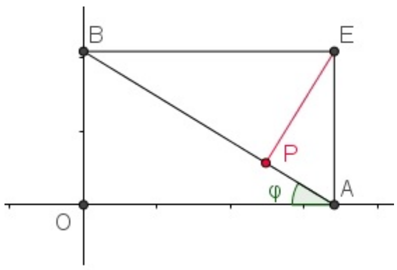


Abbildung 2.2: Konstruktion der Astroide

Zur Berechnung der Koordinaten von P fällt man die Lote von eben diesem Punkt aus auf die Achsen und bezeichnet die so entstehenden Punkte mit G bzw H.
So wie es im oberern Bild schon eingetragen ist, wird der Winkel $\sphericalangle$BAO mit φ bezeichnet. Es ergibt sich durch Winkelsummen in den jeweiligen Dreiecken:

$$\varphi = \sphericalangle ABE = \sphericalangle BPG = \sphericalangle PEA$$

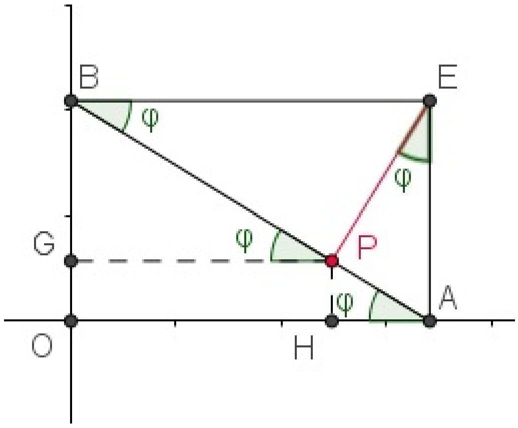


Abbildung 2.3: Konstruktion der Astroide

Wenn man mit dem Dreieck △AEP beginnt, ergibt sich

$$\overline{|BE|} = a\cos\varphi$$

Mit dem Dreieck △PEB fortfahren:

$$\overline{|BP|} = \overline{|BE|}\cos\varphi = a\cos^2\varphi$$

Betrachtung des Dreiecks △GPB ergibt:

$$x = \overline{|GP|} = \overline{|BP|}\cos\varphi = a\cos^3\varphi$$

Analoge Berechnung führt zu $y = a\sin^3\varphi$ Also folgt die Koordinatengleichung:

$$x = a\cos^3\varphi$$

$$y = a\sin^3\varphi$$

Man sieht direkt, dass sowohl in Richtung der x-Achse als auch in der der y-Achse die Kurve durch |a| beschränkt ist. Für den Winkel $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ liegt die x-Koordinate bei a bzw -a, für $\varphi = \frac{pi}{2}$ oder $\varphi = \frac{3pi}{2}$ trägt die y-Koordinate den Wert a mit jeweiligem Vorzeichen. Darum ist die Astroide durch den Kreis mit Radius r = a umschlossen.

2.2 Tangentenkonstruktion nach der Theorie des augenblicklichen Drehmoments

Die Kurve wird durch die Bewegung einer starren Gerade fester Länge konstruiert.
Mt den Bezeichnungen von Abb. 2.2 bewegt sich Punkt A auf der x-Achse zu dem Ursprung hin, also wandert der Punkt A waagerecht nach links. Der Punkt B bewegt sich zeitgleich auf der y-Achse vom Ursprung weg also senkrecht nach oben.
Wenn man auf diesen Bewegungsrichtungen die Lote fällt, erhält man den augenblicklichen Drehpunkt. Dies ist aber gerade der Punkt E, da OAEB nunmal ein Rechteck bilden.

Nun verbindet man den augenblicklichen Drehpunkt mit dem Punkt der Kurve und das Lot auf diese Verbindungsstrecke ist die Tangente in dem betrachteten Kurvenpunkt. Dies ist aber gerade die Strecke $\overline{AB}$.
Also ist die Strecke $\overline{AB}$ Kurventangente.

2.2.1 Die Astroide als Hüllkurve von Geraden

Eine Hüllkurve zu einer Kurvenschar ist eine Kurve, die jede Kurve der Kurvenschar in genau einem Punkt berührt. Da eine Tangente zu einer Kurve nunmal eben diese in genau einem Punkt berührt, ist jede Kurve Hüllkurve ihrer Tangenten. Ein Bild mit der Astroiden als Hüllkurve der Kurvenschar der Geraden, auf denen die Strecken $\overline{AB}$ liegen, gibt eine anschauliche Erklärung des Begriffs „Hüllkurve“:

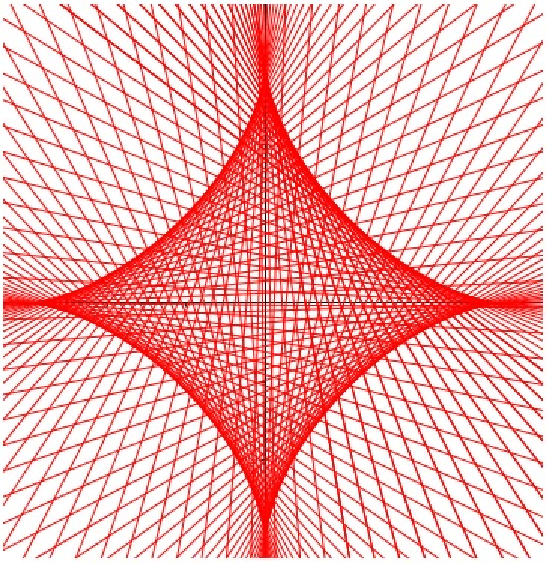


Abbildung 2.4: Astroide als Hüllkurve

2.3 Konstruktion als Epizykloide

Anhand des Bildes der Astroide kann man sich vielleicht schonmal vorstellen, dass es möglich ist, diese Kurve als **Epizykloide** zu erzeugen. Das dies so ist, kann man auch nachrechnen.
Wir haben einen festen Kreis mit Radius a. Auf dessen Umfang rollt im Inneren ein Kreis mit Radius $\frac{a}{4}$ ab. Der markierte Punkt P des rollenden Kreises und damit eben derjenige Punkt, der die Kurve erzeugen wird, liegt in der Anfangslage auf dem Punkt B. Der Berührpunkt der beiden Kreise wird N genannt, der Winkel $\sphericalangle PMN$ wird mit ψ bezeichnet, wobei M der Mittelpunkt des rollenden Kreises bezeichnet.
Es ergibt sich folgendes Bild:

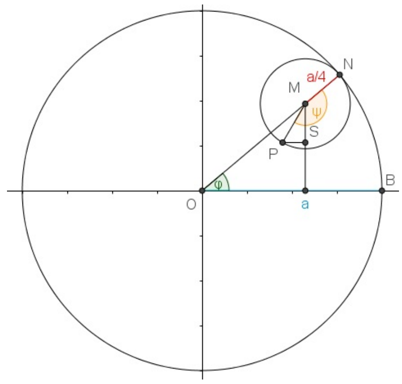


Abbildung 2.5: Konstruktion

Um auf die Koordinaten des Punktes P zu kommen, geht man von denen des Mittelpunktes des rollenden Kreises aus.

$$M = \left(\frac{3a}{4} \sin \varphi, \frac{3a}{4} \sin \varphi \right)$$

Nun muss man weiterhin den Winkel $\sphericalangle$PMS berechnen. Dazu suchen wir einen Zusammenhang zwischen ψ und φ:
Da der kleinere Kreis in dem Größeren abrollt und da P in der Anfangslage auf B liegt, gilt, dass die Bogenlängen von N nach B und die von N nach P gleich lang sind, also:

$$2\pi \frac{3a}{4} \frac{\varphi}{2\pi} = 2\pi \frac{a}{4} \frac{\psi}{2\pi}$$

Also ist $4\varphi = \psi$.
Wir bezeichen den Winkel $\sphericalangle PMS$ mit α bezeichnen.

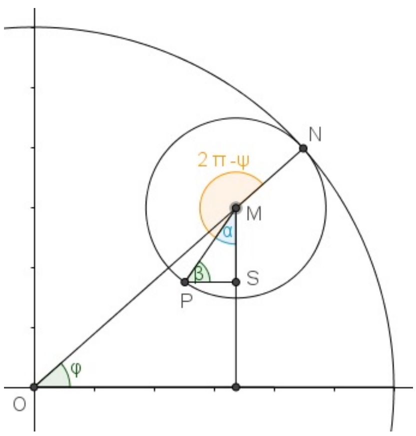


Abbildung 2.6: Konstruktion

Wenn man den Winkel $\sphericalangle NMO = \pi$ betrachtet, ergibt sich:

$$\pi = \psi + \frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha$$
$$\Rightarrow \alpha = 3\varphi - \frac{\pi}{2}$$

Wenn man das Dreieck $\triangle PSM$ betrachtet, gilt:

$$\frac{\pi}{2} = \alpha + \beta = 3\varphi - \frac{\pi}{2} + \beta$$
$$\Rightarrow \beta = \pi - 3\varphi$$

Mit diesem Winkel β lassen sich leichter die Terme zusammenfassen. Es folgt:

$$\overline{PS} = \frac{a}{4}\cos(\pi - 3\varphi)$$
$$\overline{MS} = \frac{a}{4}\sin(\pi - 3\varphi)$$

Weil der Cosinus achsensymmetrisch bzw der Sinus punktsymmetrisch ist und das Argument verschoben um π ein Vorzeichen ergibt, gilt:

$$\overline{PS} = -\frac{a}{4}\cos(3\varphi)$$
$$\overline{MS} = \frac{a}{4}\sin(3\varphi)$$

Wenn man dies von den Koordinaten von M abzieht, erhält man:

$$P = \left(a\left(\frac{3\cos\varphi + \cos 3\varphi}{4}\right), a\left(\frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}\right)\right)$$

Nun gelten die leicht nachzurechnenden Additionstheoreme

$$\cos^3\varphi = \frac{3\cos\varphi + \cos 3\varphi}{4} \text{ und } \sin^3\varphi = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}$$

Einsetzen ergibt:

$$P = (a\cos^3\varphi, a\sin^3\varphi)$$

Damit beschreibt der Punkt P - wie gewünscht - eine Astroide.

2.3.1 Konstruktion als Gelenkparalellogramm

Ähnlich ist die Konstruktion der Astroide mit einem **Gelenkparalellogramm**:
Ein Gelenkparalellogramm mit Seitenlängen l und $\frac{l}{3}$ sitzt mit einer Ecke am Ursprung. Die beiden anliegenden Seiten drehen sich in entgegengesetzte Richtungen um den Ursprung und die vierte, dem Ursprung entgegengesetzte Ecke, zeichnet die Kurve.

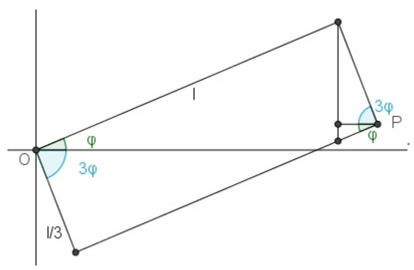


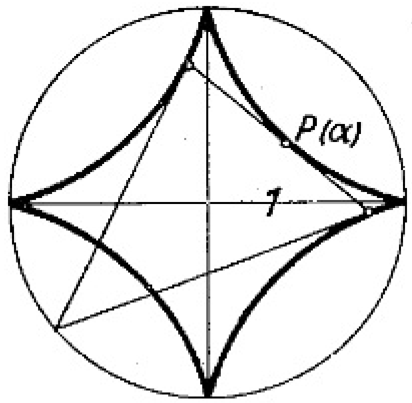
Abbildung 2.7: Eigenkonstruktion

Es ergibt sich:

$$y = l\sin\varphi - \frac{l}{3}\sin 3\varphi = \frac{l}{3}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$$
$$x = l\cos\varphi + \frac{l}{3}\cos 3\varphi = \frac{l}{3}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)$$

Dies ist eine Astroide mit $\frac{a}{4} = \frac{l}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{3}l$

2.4 Lehrsatz über die Tangenten der Astroide



In einem Punkt der Astroide ist die Tangente, die in zwei weiteren Punkten der Astroide diese schneidet, gezogen. Zieht man nun in diesen Punkten ihre Tangenten, so schneiden sich diese in einem Punkt des Kreises, der die Astroide umgibt.

Abbildung 2.8: Lehrsatz

Für die Länge a der erzeugenden Strecke der Astroide aus Abschnitt 2.1 gilt der Einfachheit halber a = 1.
Zunächst überlegen wir, wie die Tangentengleichung in dem speziellen Punkt P aussieht. Der Punkt P der Astroide liegt auf der Strecke $\overline{AB}$. Wie in Abschnitt 2.2 erklärt ist, ist die Gerade, auf der die Strecke $\overline{AB}$ liegt, die Tangente im Punkt P.
Wir bezeichnen den Winkel, den die Gerade mit der x-Achse einschließt, mit α, und den Punkt der Astroide, der mit diesem Winkel konstruiert wird, mit $P(\alpha)$ (Analoge Bezeichnungen wie in der Skizze). Dann lautet die Geradengleichung für die Gerade, auf der die Strecke $\overline{AB}$ mit Länge 1 liegt, und damit die Tangentengleichung im Punkt $P(\alpha)$:

$$\frac{X}{\cos\alpha} + \frac{Y}{\sin\alpha} = 1$$

Da $\overline{AB}$=a=1 gilt, lauten die Koordinaten für einen beliebigen Punkt der Astroide:

$$X = \cos^3\varphi, Y = \sin^3\varphi$$

Da ein Schnittpunkt S zwischen der Kurve und der Tangente im Punkt $P(\alpha)$ sowohl auf der Kurve als auch auf der Tangenten liegt, kann man diese Koordinaten in die Tangentengleichung einsetzen:

$$\frac{cos^3\varphi}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\varphi}{\sin\alpha} = 1$$

Zur Vereinfachung werden folgenden Parameter eingeführt:

$$\cos\varphi = x, \sin\varphi = y$$

$$\cos\alpha = a, \sin\alpha = b$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{b} = 1 \tag{2.1}$$

Nun wollen wir Zusammenhänge zwischen den Werten x, y, a und b finden.

Zunächst wird die Gleichung (2.1) nach y aufgelöst.

$$\frac{y^3}{b} = 1 - \frac{x^3}{a} \text{ und dies quadriert ergibt: } \frac{(y^2)^3}{b^2} = \left(1 - \frac{x^3}{a}\right)^2$$

Da $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$ gilt, kann man für $y = 1 - x^2$ einsetzen und erhält dieses Bild:

$$\frac{(1-x^2)^3}{b^2} = \left(1 - \frac{x^3}{a}\right)^2$$

Nun werden die binomischen Formeln ausmultipliziert.

$$\frac{1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6}{b^2} = 1 - \frac{2x^3}{a} + \frac{x^6}{a^2}$$

Mit den Nennern multiplizieren und Zusammenfassen ergibt diese Gleichung:

$$(a^2 + b^2)x^6 - 3a^2x^4 - 2ab^2x^3 + 3a^2x^2 - a^2(1 - b^2) = 0$$

$a = \cos\alpha$ und $b = \sin\alpha$. Also gilt $a^2 + b^2 = 1$ bzw. $1 - b^2 = a^2$, womit folgt:

$$x^6 - 3a^2x^4 - 2ab^2x^3 + 3a^2x^2 - a^4 = 0$$

$$x^6 - 3a^2x^4 - 2ax^3 + 2a^3x^3 + 3a^2x^2 - a^4 = 0 \tag{2.2}$$

Da die Tangente den doppelten Berührpunkt $P(\alpha)$ mit a = $\cos\alpha$ hat, kann man die Gleichung (2.2) durch $(x - a)^2$ teilen. Es ergibt sich:

$$x^4 + 2ax^3 - 2ax - a^2 = 0 \tag{2.3}$$

Wenn man am Anfang nicht nach y sondern nach x auflöst und analog vorgeht, ergibt sich:

$$y^4 + 2by^3 - 2by - b^2 = 0 \tag{2.4}$$

Die Gleichungen (2.3) und (2.4) durch a^2 bzw. b^2 teilen und Addieren ergibt:

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2} + 2\left(\frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{b}\right) - 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) - 2 = 0$$

Da $\frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{b} = 1$

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2} = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \tag{2.5}$$

Wieder ausgehend von der anfänglichen Gleichung (2.1).
Wir multiplizieren beide Seiten von (2.1) mit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ und erhalten noch etwas Umformen:

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2} + \frac{xy}{ab} \cdot (x^2 + y^2) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

Da $x^2 + y^2 = 1$, folgt:

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2} + \frac{xy}{ab} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \tag{2.6}$$

Aus der Kombination der beiden Gleichungen (2.5) und (2.6) folgt:

$$\frac{xy}{ab} = -\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = -1 \tag{2.7}$$

Nach Wiedereinsetzen der Werte für a, b, x und y:

$$\frac{-\cos\alpha}{\cos\varphi} + \frac{-\sin\alpha}{\sin\varphi} \tag{2.8}$$

Die Gleichung (2.8) gilt für den Schnittpunkt S der Tangente mit der Kurve. An diesem Punkt S wird die Tangente gebildet. Die Gleichung hierfür lautet:

$$\frac{\zeta}{\cos\varphi} + \frac{\eta}{\sin\varphi} = 1 \tag{2.9}$$

Die Gleichung (2.9) wird also von $\zeta = -\cos\alpha$ und $\eta = -\sin\alpha$ erfüllt. Daraus folgt: Der Punkt $\zeta = -\cos\alpha = \cos(\alpha + \pi)$, $\eta = -\sin\alpha = \sin(\alpha + \pi)$ liegt auf der in S gezogenen Tangente. Da $(\cos(\alpha + \pi))^2 + (\sin(\alpha + \pi))^2 = 1$ gilt, ist (ζ, η) ein Punkt auf dem Kreis mit Radius 1, also insbesondere ein Punkt des Umkreises der Astroide.
Die Tangente in $P(\alpha)$ hat die zwei Schnittpunkte S und S', also gilt für jeden dieser beiden Punkte (2.9) und auf jeder dieser beiden Tangenten liegt der Punkt (ζ, η).
Damit schneiden sich die Tangenten der beiden Punkte S, S' in dem auf dem Umkreis der Astroiden liegenden Punkt $\zeta = \cos(\alpha + \pi)$ und $\eta = \sin(\alpha + \pi)$.

2.5 Länge der Kurve und Flächeninhalt

Die Astroide besitzt interessante Werte für ihren Flächeninhalt sowie für ihre Länge.
An dieser Stelle möchte ich die Werte nur nennen, da die Berechnung aufwendig ist und damit den Rahmen dieser Ausarbeitung überschreiten würde.

Die Länge besitzt mit $16 \cdot a$ einen überraschend glatten Wert.
Der Wert der Fläche der Kurve beträgt $\frac{3}{8}a^2\pi$. Erwähnt sei hier, dass der Flächeninhalt des Kreises, der die Kurve umgibt, $a^2\pi$ groß ist. Also schließt die Astroide $\frac{3}{8}$ der Fläche des sie umgebenden Kreises ein.

3 Quellennachweise

Wie auf der Titelseite geschrieben ist, ist diese Ausarbeitung im Rahmen eines Seminares an der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz entstanden. Grundlage dieses Seminares und damit auch die hauptsächliche Quelle ist das Buch **„Ausgewählte höhere Kurven“** von Hermann Schmidt. Die relevanten Abschnitte sind in dem Kapitel **Fünfte Gruppe**, Paragraph 17 (*Die Rosette*) und Paragraph 18 (*Die Astroide*) zu finden.
Auch die meisten Abbildungen sind an diesem Werk orientiert. Abb. 2.8 dieser Ausarbeitung ist mit leichter Abwandlung direkt der Seite 169 des Buches „Ausgewählte höhere Kurven“ entnommen.
Zudem dient die Seite 247 dieses Buches (*Tangentenkonstruktion nach der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes*) als Grundlage zu den Erklärungen im Abschnitt 2.2.

Die homepage

$$http://www.mathcurve.com/courbes2d/trefle/trefle.shtml$$

dient als Quelle zu dem in Kapitel 1.1 erwähnten Namen *quadrifolium* und *trèfle à quatre feuilles.* Außerdem stammen daher die Ideen zu den Unterkapiteln 1.3.3 und 1.3.4.

Weitere historische Informationen für das zweite Kapitel stammen von

$$http://www.mathcurve.com/courbes2d/astroid/astroid.shtml$$

$$http://www.2dcurves.com/roulette/roulettea.html$$

$$https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_Johann_von_Littrow$$

Die Erklärung zu dem Begriff der Hüllkurve in 2.2.1 ist

$$https://de.wikipedia.org/wiki/Einh\%C3\%BCllende$$

entnommen.